最佳零相关区序列集构造法

陈晓玉[1,2]，高茜超[1,2]，李永杰[1,2]
（1. 燕山大学信息科学与工程学院，河北 秦皇岛 066004；2. 河北省信息传输与信号处理重点实验室，河北 秦皇岛 066004）

摘　要：基于完备序列和正交序列集，研究了零相关区序列集的构造方法。借助有限域上构造方法的思想，实现了最佳零相关区序列集的构造，且通过改变集合 O 和集合 R，生成多个移位不等价零相关区序列集，扩展了序列集的数量。所提构造方法在满足 $p=\frac{Z}{N}$ 或 $p^n=\frac{Z}{N}$ 的条件下，其中 p 为素数，零相关区长度可以灵活选择，以满足不同系统对信道时延的要求。

关键词：零相关区；完备序列；正交序列集；移位不等价
中图分类号：TN911.2
文献标识码：A
doi: 10.11959/j.issn.1000−436x.2020175

Construction of optimal zero correlation zone sequence set

CHEN Xiaoyu[1,2], GAO Xichao[1,2], LI Yongjie[1,2]
1. School of Information Science & Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China
2. Hebei Province Key Laboratory of Information Transmission and Signal Processing, Qinhuangdao 066004, China

Abstract: The construction of zero correlation zone (ZCZ) sequence set was researched based on perfect sequences and orthogonal sequence set. With the method of constructing on finite field, the optimal zero correlation zone sequence sets were constructed, by changing the set O and R, multiple shift distinct ZCZ sequence sets could be obtained and the number of sets could be expended. Through the constructions, the length of ZCZ can be chosen flexibly to meet the requirements of different systems for channel delay under the condition of $p=\frac{Z}{N}$ or $p^n=\frac{Z}{N}$, where p is a prime.

Key words: zero correlation zone, perfect sequence, orthogonal sequence set, shift distinct

1　引言

在准同步码分多址（QS-CDMA, quasi-synchronous code division multiple access）通信系统中，为了更好地进行通信，消除用户之间的多址干扰和用户自身信号的时延信号所带来的多径干扰[1]，要将用户信号之间的同步误差控制在一定范围内。零相关区（ZCZ, zero correlation zone）序列是一类在零时延附近的一定区域内满足异相自相关函数和互相关函数同时为零的序列，若设计的ZCZ 序列集的零相关区长度大于信道的最大时延，则可以利用自身理想的自相关特性消除通信系统的多径干扰，利用自身理想的互相关特性消除用户之间的多址干扰。因此，ZCZ 序列被广泛应用于QS-CDMA 通信系统。同时，恒模 ZCZ 序列集（如四元 ZCZ 序列集）可以应用于多输入多输出正交频分复用（MIMO-OFDM, multiple-input multiple-output orthogonal frequency division multiplexing）系统的信道估计中。将 ZCZ 序列设定为导频序列，保证 ZCZ 序列集零相关区长度 Z 大于或等于循环前缀，采用时域信道估计方法，将接收到的导频符号与局部移位的 ZCZ 序列通过相关器进行计算，得到

收稿日期：2020−04−28；**修回日期**：2020−06−28
基金项目：国家自然科学基金资助项目（No.61601399）
Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (No.61601399)

对应信道的脉冲响应，由于 ZCZ 序列集在相关区内具有良好的自相关和互相关特性，可以使信道估计的归一化均方误差仅取决于接收的信噪比，从而有效消除小区间干扰产生的信道估计误差[2-3]。

针对 ZCZ 序列集的设计，Tang 等[4]提出了 ZCZ 序列集的理论界，证明了当序列长度一定时序列数量和零相关区长度存在制约关系，希望构造灵活选择参数的 ZCZ 序列集以满足不同系统的要求。目前，学者们提出了多种 ZCZ 序列集的构造方法。文献[5]基于 Reed-Muller 码，利用布尔函数构造了 ZCZ 序列集，但零相关区长度被限制为2^n。文献[6]提出了利用不匹配滤波法构造最佳四元零相关区序列集的方法，其参数可以灵活选择。基于完备序列和互补序列集构造 ZCZ 序列集的研究更加广泛。基于互补序列集，文献[7-9]构造了一类 ZCZ 序列集，但其参数不能达到理论界限。基于 Pu 矩阵，文献[10]提出了几乎最佳 ZCZ 序列集的构造方法，在不需要构造互补序列集的前提下，直接推导出 Pu 矩阵与 ZCZ 序列集之间的关系。文献[11]基于完备序列和酉矩阵构造了一类多相零相关区序列集，但序列集的参数接近理论值，不能达到最优。基于三元完备序列和 Hadamard 矩阵，文献[12]提出了一类参数达到理论界限的三元 ZCZ 序列集构造方法。文献[13]基于完备序列和移位序列，利用正交矩阵，利用交织法构造了一类 p 相 ZCZ 序列集，参数不能达到理论界限，并且零相关区长度受基序列限制。此外，文献[14-17]基于完备序列和移位序列，利用交织法，提出了 ZCZ 序列集的构造方法。现有学者将组合设计应用于序列设计中，利用有限域特性提出扩频序列集的构造方法。文献[18]基于正交矩阵，提出了零相关区非周期互补序列集的构造方法。基于正交矩阵，文献[19]利用有限域方法构造了相互正交互补序列集，并以此为基础，通过级联法完成了二元多子集 ZCZ 序列集的构造。本文借助有限域上构造方法的思想，提出了多个移位不等价 ZCZ 序列集的构造方法。

本文以完备序列和正交序列集作为基序列，给出一类 ZCZ 序列集的构造法；得到的 ZCZ 序列集参数达到理论界限，在满足 $p=\dfrac{Z}{N}$ 或 $p^n=\dfrac{Z}{N}$ 的同时，序列集的零相关区长度可以灵活选择；设置集合 O 和集合 R 的多种取值方法，生成多个移位不等价零相关区序列集。

2 基本概念

定义 1 设 $a=\left(a(0),a(1),\cdots,a(N-1)\right)$ 和 $b=(b(0),b(1),\cdots,b(N-1))$ 是 2 个长度为 N 的复数序列，序列 a 和序列 b 的周期互相关函数定义为

$$R_{a,b}(\tau)=\sum_{t=0}^{N-1}a(t)b^*\left(t+\tau\right),0\leqslant\tau\leqslant N-1 \tag{1}$$

其中，* 表示共轭复数，$t+\tau$ 为模 N 运算。当 $a=b$ 时，$R_{a,a}\left(\tau\right)$ 为序列 a 的自相关函数，记为 $R_a\left(\tau\right)$。

定义 2 设长度为 N 的序列 $u=(u(0),u(1),\cdots,u(N-1))$ 的周期自相关函数满足

$$R_u(\tau)=\begin{cases}E_u,\ \tau(\bmod N)=0\\0,\quad \tau(\bmod N)\neq 0\end{cases} \tag{2}$$

其中，$E_u=\sum_{t=0}^{N-1}\left|u\left(t\right)\right|^2$。若 E_u 是一个正数，则称序列 u 为完备序列。

定义 3 设 $C=\{c_0,c_1,\cdots,c_{M-1}\}$ 为包含 M 个序列的序列集，$c_m=\left(c_m(0),c_m(1),c_m(2),\cdots,c_m(N-1)\right)$ 是周期为 N 的序列，其中 $0\leqslant m\leqslant M-1$。对于序列集 C 中任意的 2 个序列 c_{m_1},c_{m_2}，当 $0\leqslant m_1,m_2\leqslant M-1$，$m_1\neq m_2$ 时，序列的相关函数满足 $R_{c_{m_1},c_{m_2}}(0)=0$，则称序列集 C 为正交序列集。

定义 4 设 $S=\{s_0,s_1,\cdots,s_{M-1}\}$ 是 M 个周期为 N 的序列组成的集合，其中 $s_m=(s_m(0),s_m(1),\cdots,s_m(N-1))$，$0\leqslant m\leqslant M-1$。如果序列的周期互相关函数满足式(3)，则称序列集 S 为零相关区序列集，其参数表示为 $\mathrm{ZCZ}(N,M,Z)$，N、M、Z 分别表示序列的长度、序列集中序列的数目、零相关区的长度。

$$R_{s_i,s_j}(\tau)=\begin{cases}E,\ i=j,\tau=0\\0,\ i=j,0<|\tau|<Z\\0,\ i\neq j,|\tau|<Z\end{cases} \tag{3}$$

其中，$0\leqslant i,j\leqslant M-1$，$E=\sum_{t=0}^{N-1}\left|s_m\left(t\right)\right|^2$。

定义 5 设序列 $x=\left(x(0),x(1),\cdots,x(N-1)\right)$ 和序列 $y=\left(y(0),y(1),\cdots,y(N-1)\right)$ 是 2 个长度为 N 的复数序列，当存在一个 τ 值（$0\leqslant\tau\leqslant N-1$），使 $y(t)=x(t+\tau)$ 对所有的 $0\leqslant t\leqslant N-1$ 均成立，那么称序列 x 和序列 y 移位等价；否则为移位不等价。设有序列集 X 和序列集 Y，若对于任意的序列 $x\in X$ 和

任意的序列 $y \in Y$，均有序列 x 和序列 y 移位不等价，则称序列集 X 和序列集 Y 是移位不等价序列集。

定义 6[4]　设有参数为 $\mathrm{ZCZ}(N,M,Z)$ 的零相关区序列集，根据 ZCZ 的理论界限值可知，$\dfrac{ZM}{N} \leqslant 1$。假设 M_0 是理论上序列数目的最大值，则 $M_0 = \left\lfloor \dfrac{N}{Z} \right\rfloor$，其中 $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示向下取整。如果序列集的数目满足 $M = M_0$，则称序列集为最佳 ZCZ 序列集。此时性能参数 $\eta = \dfrac{M}{\left\lfloor \dfrac{N}{Z} \right\rfloor} = 1$。如果 $M = M_0 - 1$ 或 $M = M_0 - 2$，则称序列集为几乎最佳 ZCZ 序列集。

3　构造方法

本节基于完备序列和正交序列集，分别利用有限域 $\mathrm{GF}(p)$ 和 $\mathrm{GF}(p^n)$，给出最佳 ZCZ 序列集的构造方法。

3.1　构造法 1

步骤 1　设 $u = \left(u(0), u(1), \cdots, u(N-1)\right)$ 为完备序列，周期为 N。正交序列集 $C = \{c_0, c_1, \cdots, c_{N_0-1}\}$，含有 N_0 个序列，其中每个序列的长度为 N_0，即 $c_i = \left(c_i(0), c_i(1), \cdots, c_i(N_0-1)\right)$，$0 \leqslant i \leqslant N_0 - 1$，$N_0$ 为正整数且 $N_0 \geqslant 2$。正整数 Z、N_1 和一个素数 p 满足 $Z \mid N$，$p = \dfrac{N}{Z}$，$N_0 = N_1 Z$，其中 $0 < Z \leqslant p-1$，$1 < N_1 \leqslant p$。

步骤 2　设 $\mathrm{GF}(p) = \{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$ 为一个有限域，$\mathrm{GF}(p)^*$ 表示有限域 $\mathrm{GF}(p)$ 中的所有非零元素的集合，$\mathrm{GF}(p)^* = \{1, 2, 3, \cdots, p-1\}$。集合 $O = \{o_i \mid o_i \in \mathrm{GF}(p)^*, 0 \leqslant i \leqslant Z-1\}$，集合 $R = \{r_i \mid r_i \in \mathrm{GF}(p), 0 \leqslant i \leqslant N_1 - 1\}$。

步骤 3　利用完备序列 u 和正交序列集 C，构造包含 Q 个序列的序列集 $M = \{m_0, m_1, \cdots, m_{Q-1}\}$，每个序列 $m_q = \left(m_q(0), m_q(1), \cdots, m_q(n), \cdots, m_q(NN_0-1)\right)$ 的长度为 NN_0。其中，$Q = pN_0 = pN_1 Z$，$q = kN_0 + v$，$k \in \mathrm{GF}(p)$，$0 \leqslant v \leqslant N_0 - 1$，具体构造方法为

$$m_q(n) = u\left(\left(\xi + \left\lfloor \frac{n}{N_0} \right\rfloor\right) \bmod N\right) c_v\left(n \bmod N_0\right),\quad 0 \leqslant n \leqslant NN_0 - 1 \tag{4}$$

其中，$\xi = \left(n \bmod Z\right) p + k \oplus o_{(n \bmod Z)} r_{\left\lfloor \frac{n \bmod N_0}{Z} \right\rfloor}$，$\oplus$ 为有限域 $\mathrm{GF}(p)$ 上的加法形式。

定理 1　由构造法 1 构造得到的序列集 M 是一个参数为 $\mathrm{ZCZ}(NN_0, Q, Z)$ 的 ZCZ 序列集，其中 $Q=pN_1Z$。

证明　定义 2 个正整数 $n = n_1 N_0 + n_0$，$\tau = \tau_1 N_0 + \tau_0$，其中 $0 \leqslant n_0, \tau_0 \leqslant N_0 - 1$，$0 \leqslant n_1, \tau_1 \leqslant N - 1$。设任意 2 个序列 $m_{q_0}, m_{q_1} \in M$，其中，$q_0 = k_0 N_0 + v_0, q_1 = k_1 N_0 + v_1$，计算其周期相关函数为

$$R_{m_{q_0}, m_{q_1}}(\tau) = \sum_{n=0}^{NN_0-1} m_{q_0}(n) m_{q_1}^*\left((n+\tau) \bmod NN_0\right) = \sum_{n_0=0}^{N_0-1} c_{v_0}(n_0) c_{v_1}^*(n_0 + \tau_0) \sum_{n_1=0}^{N-1} u\left((\xi_1' + n_1) \bmod N\right) u^* \cdot \left((\xi_0' + n_1 + \tau_1) \bmod N\right) = \sum_{n_0=0}^{N_0-1} c_{v_0}(n_0) c_{v_1}^*(n_0 + \tau_0) R_{u,u}\left(\xi_1' - \xi_0' + \tau_1\right)$$

其中，

$$\xi_0' = \left(n_0 \bmod Z\right) p + k_0 \oplus o_{(n_0 \bmod Z)} r_{\left\lfloor \frac{n_0}{Z} \right\rfloor}$$

$$\xi_1' = \left((n_0 + \tau_0) \bmod Z\right) p + k_1 \oplus o_{((n_0+\tau_0) \bmod Z)} r_{\left\lfloor \frac{n_0+\tau_0}{Z} \right\rfloor}$$

分以下 4 种情况进行讨论。

情况 1　当 $k_0 = k_1, v_0 = v_1$ 且 $0 < |\tau| < Z$ 时，有 $\tau_1 = 0, 0 < \tau_0 < Z$，进而可得 $q_0 = q_1, \xi_0' \neq \xi_1'$。根据完备序列 u 的性质，有 $R_{u,u}\left(\xi_1' - \xi_0' + \tau_1\right) = 0$，则 $R_{m_{q_0}, m_{q_1}}(\tau) = 0$。

情况 2　当 $k_0 = k_1, v_0 \neq v_1$ 且 $\tau = 0$ 时，有 $\tau_1 = \tau_0 = 0$，进而可得 $q_0 \neq q_1, \xi_0' = \xi_1'$。根据正交序列集 C 的性质，有 $R_{c_{v_0}, c_{v_1}}(0) = 0$，则 $R_{m_{q_0}, m_{q_1}}(\tau) = 0$。

情况 3　当 $k_0 = k_1, v_0 \neq v_1$ 且 $0 < |\tau| < Z$ 时，有 $\tau_1 = 0, 0 < \tau_0 < Z$，可得 $q_0 \neq q_1, \xi_0' \neq \xi_1'$，则 $R_{u,u}\left(\xi_1' - \xi_0' + \tau_1\right) = 0$，即 $R_{m_{q_0}, m_{q_1}}(\tau) = 0$。

情况 4　当 $k_0 \neq k_1$ 且 $|\tau| < Z$ 时，有 $\tau_1 = 0, 0 < \tau_0 < Z$，可得 $q_0 \neq q_1, \xi_0' \neq \xi_1'$，则 $R_{m_{q_0}, m_{q_1}}(\tau) = 0$。

综合以上 4 种情况可知，序列集 M 是一个参数为 $\mathrm{ZCZ}(NN_0, Q, Z)$ 的 ZCZ 序列集。证毕。

定理 2　序列集 M 参数达到理论界限，是一个最佳 ZCZ 序列集。

证明 定理 1 构造的序列集 M 参数为 $\mathrm{ZCZ}(NN_0,Q,Z)$，其中 $Q=pN_1Z$。根据 ZCZ 序列集理论界限，设 M_0 为 ZCZ 序列集中序列数目的理论上界。

$$M_0=\left\lfloor \frac{NN_0}{Z} \right\rfloor=\left\lfloor \frac{pZN_1Z}{Z} \right\rfloor=pN_1Z=Q$$

可知，序列集中序列数目达到了理论上界，是一个最佳 ZCZ 序列集。证毕。

推论 1 在构造法 1 中，可以灵活选择集合 O 和集合 R 中的元素，集合 $O^l=\{o_i^l \mid o_i^l\in \mathrm{GF}(p)^*, 0\leqslant i\leqslant Z-1\}$ $(0\leqslant l\leqslant L-1)$ 和集合 $R^d=\{r_i^d \mid r_i^d\in \mathrm{GF}(p), 0\leqslant i\leqslant N_1-1\}$ $(0\leqslant d\leqslant D-1)$ 均满足条件，其中 $L=\mathrm{C}_{p-1}^{Z}, D=\mathrm{C}_p^{N_1}$，$\mathrm{C}_a^b$ 表示排列组合运算。设集合 O^{l_1}、R^{d_1} 和集合 O^{l_2}、R^{d_2} $(0\leqslant l_1,l_2\leqslant L-1, 0\leqslant d_1,d_2\leqslant D-1)$ 为其中任意 2 组集合，构造的零相关区序列集分别为 M^{s_1} 和 M^{s_2}，若 $l_1\neq l_2$ 或 $d_1\neq d_2$，则序列集 M^{s_1} 和序列集 M^{s_2} 移位不等价。构造法 1 构造的移位不等价序列集的数量 $S=LD$。

证明 设任意的 2 个零相关区序列 $m_{q_1}\in M^{s_1}, m_{q_2}\in M^{s_2}$，$0\leqslant s_1,s_2\leqslant S-1$，若要证明序列集 M^{s_1} 和序列集 M^{s_2} 移位不等价，只需证明分别来自不同的序列集 M^{s_1} 和 M^{s_2} 中任意 2 个零相关区序列移位不等价，即证明不存在 τ 值，其中 $0\leqslant\tau=\tau_1N_0+\tau_0\leqslant NN_0-1$, $0\leqslant\tau_1\leqslant N-1, 0\leqslant\tau_0\leqslant N_0-1$，使 $R_{m_{q_1},m_{q_2}}(\tau)=E_uE_c$ 成立。计算序列 m_{q_1} 与序列 m_{q_2} 之间的相关函数为

$$R_{m_{q_1},m_{q_2}}(\tau)=\sum_{n_0=0}^{N_0-1}c_{v_1}(n_0)c_{v_2}^*(n_0+\tau_0)\cdot R_{u,u}\left(\left(\xi_2'-\xi_1'+\tau_1\right)\bmod N\right) \tag{5}$$

其中，

$$\xi_1'=\left(n_0 \bmod Z\right)p+k_1\oplus o_{(n_0 \bmod Z)}^{l_1} r_{\left\lfloor \frac{n_0}{Z}\right\rfloor}^{d_1}$$

$$\xi_2'=\left(\left(n_0+\tau_0\right)\bmod Z\right)p+k_2\oplus o_{\left(\left(n_0+\tau_0\right)\bmod Z\right)}^{l_2} r_{\left\lfloor \frac{n_0+\tau_0}{Z}\right\rfloor}^{d_2}$$

对于正交序列集 C，可知式(6)成立。

$$\sum_{n_0=0}^{N_0-1}c_{v_1}(n_0)c_{v_2}^*(n_0+\tau_0)\leqslant E_c \tag{6}$$

由此，只需证明 $R_{u,u}\left((\xi_2'-\xi_1'+\tau_1)\bmod N\right)<E_u$ 成立，则可证明 2 个序列移位不等价。

假设在 $0\leqslant\tau\leqslant NN_0-1$ 时，存在一个 τ 值，使等式 $R_{u,u}((\xi_2'-\xi_1'+\tau_1)\bmod N)=E_u$ 成立，可得 $(\xi_2'-\xi_1'+\tau_1)\bmod N=0$ 一定成立，有 $\xi_2'-\xi_1'+\tau_1=aN$，其中 a 为正整数。由于 $\xi<N$，因此 $\xi_2'-\xi_1'+\tau_1<N$，可得 a=0。故等式 $\xi_2'-\xi_1'+\tau_1=0$ 成立。下面分 2 种情况进行讨论。

情况 1 当 $0\leqslant\tau<N_0$，即 $\tau_1=0$ 时，有 $\xi_2'-\xi_1'=0$ 恒成立。由于集合 O^{l_1}、R^{d_1} 和集合 O^{l_2}、R^{d_2} 中的元素取值不同，当 $0\leqslant n_0\leqslant N_0-1$ 时，总会存在 n_0 值使 $\xi_2'\neq\xi_1'$，矛盾。

情况 2 当 $N_0\leqslant\tau\leqslant NN_0-1$，即 $\tau_1\neq 0$ 时。由于集合内的元素可取集合 O^{l_1}、R^{d_1} 和集合 O^{l_2}、R^{d_2} 中任意数值，可得存在 n_0 值使等式 $\xi_2'=\xi_1'$ 成立，即 $\xi_2'-\xi_1'+\tau_1\neq 0$，矛盾。

综上所述，不存在 $0\leqslant\tau\leqslant NN_0-1$，使 $R_{u,u}\left(\left(\xi_2'-\xi_1'+\tau_1\right)\bmod N\right)=E_u$ 恒成立。即不存在 τ 值，使 $R_{m_{q_1},m_{q_2}}(\tau)=E_uE_c$ 成立。因此，推论 1 中序列集移位不等价得证。

根据等式 $\xi=\left(n \bmod Z\right)p+k\oplus o_{(n \bmod Z)} r_{\left\lfloor \frac{n \bmod N_0}{Z}\right\rfloor}$ 可知，影响序列集数量的因素为集合 O 和集合 R 中元素 o_i 和 r_i 的取值方法。集合 $O=\{o_i \mid o_i\in \mathrm{GF}(p)^*, 0\leqslant i\leqslant Z-1\}$，集合 $R=\{r_i \mid r_i\in \mathrm{GF}(p), 0\leqslant i\leqslant N_1-1\}$，显然，移位不等价序列集的数量 $S=\mathrm{C}_{p-1}^{Z}\mathrm{C}_p^{N_1}=LD$。证毕。

例 1 取长度为 6 的完备高斯整数序列 $u=(1+5\mathrm{j},7-7\mathrm{j},11-15\mathrm{j},7-7\mathrm{j},-5+17\mathrm{j},7-7\mathrm{j})$，假设 $N_0=4$，选取正交序列集 $C=\{c_0,c_1,c_2,c_3\}$，$c_0=(0000), c_1=(0123), c_2=(0202)$，$c_3=(0321)$，其中 $0,1,2,3$ 分别表示 $1,\mathrm{j},-1,-\mathrm{j}$。设 $Z=2$，$p=3$，有限域 $\mathrm{GF}(3)=\{0,1,2\}$。选择集合 $O=\{o_0,o_1\}=\{1,2\}$ 和集合 $R=\{r_0,r_1\}=\{0,2\}$, $N_1=2$。根据构造法 1 可以得到参数为 ZCZ(24,12,2) 的零相关区序列集 M=$\{m_0,m_1,m_2,\cdots,m_{11}\}$，每个序列 $m_q=(m_q(0),m_q(1),m_q(2),\cdots,m_q(23))$ 的长度为 24，序列集中部分序列如下。

$$m_0=(1+5\mathrm{j},7-7\mathrm{j},11-15\mathrm{j},-5+17\mathrm{j},7-7\mathrm{j},-5+17\mathrm{j},7-7\mathrm{j},7-7\mathrm{j},11-15\mathrm{j},7-7\mathrm{j},-5+17\mathrm{j},1+5\mathrm{j},7-7\mathrm{j},1+5\mathrm{j},7-7\mathrm{j},7-7\mathrm{j},-5+17\mathrm{j},7-7\mathrm{j},1+5\mathrm{j},11-15\mathrm{j},7-7\mathrm{j},11-15\mathrm{j},7-7\mathrm{j},7-7\mathrm{j})$$

$m_1=(1+5\mathrm{j},7+7\mathrm{j},-11+15\mathrm{j},17+5\mathrm{j},7-7\mathrm{j},-17-5\mathrm{j},-7+7\mathrm{j},-7-7\mathrm{j},11-15\mathrm{j},7+7\mathrm{j},5-17\mathrm{j},5-\mathrm{j},7-7\mathrm{j},-5+\mathrm{j},-7+7\mathrm{j},-7-7\mathrm{j},-5+17\mathrm{j},7+7\mathrm{j},-1-5\mathrm{j},-15-11\mathrm{j},7-7\mathrm{j},15+11\mathrm{j},-7+7\mathrm{j},-7-7\mathrm{j})$

$m_2=(1+5\mathrm{j},-7+7\mathrm{j},11-15\mathrm{j},5-17\mathrm{j},7-7\mathrm{j},5-17\mathrm{j},7-7\mathrm{j},-7+7\mathrm{j},11-15\mathrm{j},-7+7\mathrm{j},-5+17\mathrm{j},-1-5\mathrm{j},7-7\mathrm{j},-1-5\mathrm{j},7-7\mathrm{j},-7+7\mathrm{j},-5+17\mathrm{j},-7+7\mathrm{j},1+5\mathrm{j},-11+15\mathrm{j},7-7\mathrm{j},-11+15\mathrm{j},7-7\mathrm{j},-7+7\mathrm{j})$

由例 1 可得，序列集 M 是参数为 $\mathrm{ZCZ}(24,12,2)$ 的零相关区序列集，根据序列集数目的理论界限值 $M_0=\left\lfloor\dfrac{N}{Z}\right\rfloor=\left\lfloor\dfrac{24}{2}\right\rfloor=12$ 可知，序列集 M 是最佳 ZCZ 序列集。

此外，构造法 1 构造的移位不等价序列集的数量 $S=LD=3$，其中，$L=\mathrm{C}_2^2=1,D=\mathrm{C}_3^2=3$。若 $O=\{o_0,o_1\}=\{1,2\},R=\{r_0,r_1\}=\{0,1\}$ 或 $O=\{o_0,o_1\}=\{1,2\},R=\{r_0,r_1\}=\{1,2\}$，可以构造 ZCZ 序列集 M^1 和 M^2。则序列集 M^1,M^2 是移位不等价的 ZCZ 序列集。ZCZ 序列集 M^1,M^2 中的部分序列如下。

$m_0^1=(1+5\mathrm{j},7-7\mathrm{j},7-7\mathrm{j},7-7\mathrm{j},7-7\mathrm{j},-5+17\mathrm{j},11-15\mathrm{j},1+5\mathrm{j},11-15\mathrm{j},7-7\mathrm{j},7-7\mathrm{j},7-7\mathrm{j},7-7\mathrm{j},1+5\mathrm{j},-5+17\mathrm{j},11-15\mathrm{j},-5+17\mathrm{j},7-7\mathrm{j},7-7,\mathrm{j},7-7\mathrm{j},7-7\mathrm{j},11-15\mathrm{j},1+5\mathrm{j},-5+17\mathrm{j})$

$m_1^1=(1+5\mathrm{j},7+7\mathrm{j},-7+7\mathrm{j},-7-7\mathrm{j},7-7\mathrm{j},-17-5\mathrm{j},-11+15\mathrm{j},5-\mathrm{j},11-15\mathrm{j},7+7\mathrm{j},-7+7\mathrm{j},-7-7\mathrm{j},7-7\mathrm{j},-5+\mathrm{j},5-17\mathrm{j},-15-11\mathrm{j},-5+17\mathrm{j},7+7\mathrm{j},-7+7\mathrm{j},-7-7\mathrm{j},7-7\mathrm{j},15+11\mathrm{j},-1-5\mathrm{j},17+5\mathrm{j})$

$m_2^1=(1+5\mathrm{j},-7+7\mathrm{j},7-7\mathrm{j},-7+7\mathrm{j},7-7\mathrm{j},5-17\mathrm{j},11-15\mathrm{j},-1-5\mathrm{j},11-15\mathrm{j},-7+7\mathrm{j},7-7\mathrm{j},-7+7\mathrm{j},7-7\mathrm{j},-1-5\mathrm{j},-5+17\mathrm{j},-11+15\mathrm{j},-5+17\mathrm{j},-7+7\mathrm{j},7-7\mathrm{j},-7+7\mathrm{j},7-7\mathrm{j},-11+15\mathrm{j},1+5\mathrm{j},5-17\mathrm{j})$

$m_0^2=(7-7\mathrm{j},7-7\mathrm{j},11-15\mathrm{j},-5+17\mathrm{j},11-15\mathrm{j},1+5\mathrm{j},7-7\mathrm{j},7-7\mathrm{j},7-7\mathrm{j},7-7\mathrm{j},-5+17\mathrm{j},1+5\mathrm{j},-5+17\mathrm{j},11-15\mathrm{j},7-7\mathrm{j},7-7\mathrm{j},7-7\mathrm{j},7-7\mathrm{j},1+5\mathrm{j},11-15\mathrm{j},1+5\mathrm{j},-5+17\mathrm{j},7-7\mathrm{j},7-7\mathrm{j})$

$m_1^2=(7-7\mathrm{j},7+7\mathrm{j},11-15\mathrm{j},17+5\mathrm{j},11-15\mathrm{j},-5+\mathrm{j},-7+7\mathrm{j},-7-7\mathrm{j},7-7\mathrm{j},7+7\mathrm{j},5-17\mathrm{j},5-\mathrm{j},-5+17\mathrm{j},15+11\mathrm{j},-7+7\mathrm{j},-7-7\mathrm{j},7-7\mathrm{j},7+7\mathrm{j},-1-5\mathrm{j},-15-11\mathrm{j},1+5\mathrm{j},-17-5\mathrm{j},-7+7\mathrm{j},-7-7\mathrm{j})$

$m_2^2=(7-7\mathrm{j},-7+7\mathrm{j},11-15\mathrm{j},5-17\mathrm{j},11-15\mathrm{j},-1-5\mathrm{j},7-7\mathrm{j},-7+7\mathrm{j},7-7\mathrm{j},-7+7\mathrm{j},-5+17\mathrm{j},-1-5\mathrm{j},-5+17\mathrm{j},-11+15\mathrm{j},7-7\mathrm{j},-7+7\mathrm{j},7-7\mathrm{j},-7+7\mathrm{j},1+5\mathrm{j},-11+15\mathrm{j},1+5\mathrm{j},5-17\mathrm{j},7-7\mathrm{j},-7+7\mathrm{j})$

可以验证，以上 2 个序列集 M^1,M^2 是参数为 $\mathrm{ZCZ}(24,12,2)$ 的移位不等价 ZCZ 序列集。

3.2　构造法 2

步骤 1　设 $u=\big(u(0),u(1),\cdots,u(N-1)\big)$ 为完备序列，周期为 N。正交序列集 $C=\{c_0,c_1,\cdots,c_{N_0-1}\}$ 含有 N_0 个序列，其中每个序列的长度为 N_0，即 $c_i=\big(c_i(0),c_i(1),\cdots,c_i(N_0-1)\big)$，$0\leqslant i\leqslant N_0-1$，$N_0$ 为正整数且 $N_0\geqslant 2$。设正整数 Z、N_1、n 和一个素数 p 满足 $Z\,|\,N$，$p^n=\dfrac{N}{Z}$，$N_0=N_1Z$。其中 $0<Z<p^n-1$，$1<N_1\leqslant p^n$。

步骤 2　选择一个本原多项式 $f(x)$ 和本原元 α，使 $f(\alpha)=0$。$\mathrm{GF}(p^n)=\{0,1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{p^n-2}\}$ 为一个有限域，$\mathrm{GF}(p^n)^*$ 表示有限域 $\mathrm{GF}(p^n)$ 中的所有非零元素的集合，$\mathrm{GF}(p^n)^*=\{1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{p^n-2}\}$。集合 $O=\{o_i\,|\,o_i\in\mathrm{GF}(p^n)^*,0\leqslant i\leqslant Z-1\}$，集合 $R=\{r_i\,|\,r_i\in\mathrm{GF}(p^n),0\leqslant i\leqslant N_1-1\}$。

步骤 3　利用完备序列 u 和正交序列集 C，构造包含 Q 个序列的序列集 $M=\{m_0,m_1,\cdots,m_{Q-1}\}$，每个序列 $m_q=\big(m_q(0),m_q(1),\cdots,m_q(n),\cdots,m_q(NN_0-1)\big)$ 的长度为 NN_0。其中，$Q=p^nN_0=p^nN_1Z$，$q=kN_0+v$，$k\in\mathrm{GF}(p^n),0\leqslant v\leqslant N_0-1$，具体构造方法如下。

$$m_q(n)=u\left(\left(\xi+\left\lfloor\frac{n}{N_0}\right\rfloor\right)\bmod N\right)c_v(n\bmod N_0),$$
$$0\leqslant n\leqslant NN_0-1 \tag{7}$$

其中，$\xi=(n\bmod Z)p^n+\varsigma$，$\varsigma=k\oplus o_{(n\bmod Z)}r_{\left\lfloor\frac{n\bmod N_0}{Z}\right\rfloor}$ 为有限域 $\mathrm{GF}(p^n)$ 的十进制表示形式，$\oplus$ 为有限域 $\mathrm{GF}(p^n)$ 上的加法形式。

定理 3　由构造法 2 构造所得的序列集 M 是一个参数为 $\mathrm{ZCZ}(NN_0,Q,Z)$ 的 ZCZ 序列集，其中 $Q=p^nN_1Z$。

定理 3 的证明过程与定理 1 的类似，此处省略。

定理 4　序列集 M 参数达到理论界限，是一个最佳 ZCZ 序列集。

证明 定理 3 所构造的序列集 M 参数为 $\mathrm{ZCZ}(NN_0, Q, Z)$，其中 $Q = p^n N_1 Z$。根据 ZCZ 序列集理论界限，设 M_0 为 ZCZ 序列集中序列数目的理论上界，则有

$$M_0 = \left\lfloor \frac{NN_0}{Z} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{p^n Z N_1 Z}{Z} \right\rfloor = p^n N_1 Z = Q$$

可得，序列集中序列数目达到了理论上界，是一个最佳 ZCZ 序列集。证毕。

推论 2 在构造法 2 中，与推论 1 类似，元素 o_i 和 r_i 可以灵活选择集合 O 和集合 R 中的数值。因此可得，构造法 2 可以构造多个移位不等价 ZCZ 序列集，移位不等价序列集的数量 $S = LD$，其中，$L = \mathrm{C}_{p^n-1}^{Z}, D = \mathrm{C}_{p^n}^{N_1}$。

推论 2 的证明过程与推论 1 的类似，此处省略。

例 2 基于完备序列 $u = (0000012302020321)$，周期 $P = 16$。选取正交序列集 $C = \{c_0, c_1, c_2, c_3\}$，$c_0 = (0000), c_1 = (0123), c_2 = (0202), c_3 = (0321)$，其中 $0,1,2,3$ 分别表示 $1, \mathrm{j}, -1, -\mathrm{j}$。设 $Z = 2$，$p = 2, n = 3$，基于有限域 $\mathrm{GF}(2^3)$，选择本原多项式 $f(x) = x^3 + x + 1$，在有限域 $\mathrm{GF}(2^3)$ 中选择合适的本原元 α，使 $f(\alpha) = 0$。设 $O = \{o_0, o_1\} = \{\alpha, \alpha^3\}$，$R = \{r_0, r_1\} = \{\alpha^3, \alpha^6\}$，$N_1 = 2$。有限域 $\mathrm{GF}(2^3)$ 中 $\{0, 1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6\}$ 分别代表十进制中 $\{0, 4, 2, 1, 6, 3, 7, 5\}$。根据构造法 2 可得参数为 $\mathrm{ZCZ}(64, 32, 2)$ 的零相关区序列集 $M = \{m_0, m_1, m_2, \cdots, m_{31}\}$，每个序列 m_q =（$m_q(0), m_q(1), m_q(2), \cdots, m_q(63)$）的长度为 64，部分序列如下。

$m_0 = (032002101122203030030022200100202100023033202010120100020203000 0)$

$m_1 = (00210333120121133122010121200103222303133003213313200121032201 23)$

$m_2 = (01000012132022303201022022030222230200323122221210030200000102 02)$

$m_3 = (02230131100323113320030323220301202101113201233111220323012003 21)$

$m_4 = (32030002220100002300021031202030100100220003002001200230132220 10)$

$m_5 = (33220121232001232023033332032113112001010122010302210313100121 33)$

由例 2 可得，序列集 M 是参数为 $\mathrm{ZCZ}(64, 32, 2)$ 的零相关区序列集，根据序列集数目的理论界限值 $M_0 = \left\lfloor \frac{N}{Z} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{64}{2} \right\rfloor = 32$ 可知，序列集 M 是最佳 ZCZ 序列集。

通过改变集合 O 和集合 R 中的元素 o_i 和 r_i，根据构造法 2 可以构造多个移位不等价 ZCZ 序列集，计算得到移位不等价序列集的数量 $S = LD = 588$，其中 $L = \mathrm{C}_7^2 = 21, D = \mathrm{C}_8^2 = 28$。本文以 2 个 ZCZ 序列集的构造为例，说明序列集间的移位不等价性。基于集合 $O = \{o_0, o_1\} = \{\alpha, \alpha^3\}$，$R = \{r_0, r_1\} = \{\alpha^6, \alpha\}$ 可以构造 ZCZ 序列集 M^1，基于集合 $O = \{o_0, o_1\} = \{\alpha, \alpha^3\}$，$R = \{r_0, r_1\} = \{\alpha, \alpha^5\}$ 可以构造 ZCZ 序列集 M^2。则序列集 M^1 和 M^2 是移位不等价 ZCZ 序列集。ZCZ 序列集 M^1 和 M^2 部分序列如下。

$m_0^1 = (02021000220330020311222001302000002030002021100201330220031200 00)$

$m_1^1 = (03211123232231210030230302132123010331232100112102120303003101 23)$

$m_2^1 = (00001202200132000113202203322202022232022222312000331002201100 202)$

$m_3^1 = (01231321212033230232210100112321030133212302132300100101023303 21)$

$m_0^2 = (02100022033002031122200130200000203000202110020133022003120000 02)$

$m_1^2 = (03330101001303221201212031030123211301032233032030212122132301 21)$

$m_2^2 = (00120220013200011320220332220202223202222312000331032201100202 00)$

$m_3^2 = (01310303021101201003232223301032123110301203101223222323201121 0323)$

由此可以验证，上述序列集 M^1 和 M^2 是参数为 $\mathrm{ZCZ}(64, 32, 2)$ 的移位不等价 ZCZ 序列集。

4 构造方法比较

表 1 对现有文献中 ZCZ 序列集构造方法和本文方法进行了比较。文献[5]基于 Reed-Muller 码，利用布尔函数构造最佳二元 ZCZ 序列集，零相关区长度限制为 2^n，不可灵活选择。文献[6]基于不匹配二元序列，利用不匹配滤波法构造了四元 ZCZ 序列集，其零相关区长度可以灵活选择。但序列个数与序列

表 1　　零相关区序列集参数比较

构造方法	初始序列	序列集参数	零相关区长度可否灵活设定	η
文献[5]	Reed-Muller 码	$\mathrm{ZCZ}\left(2^{k+1},2^{n+k+2},2^{n}\right)$	否	$\eta=1$
文献[6]	不匹配二元序列对	$\mathrm{ZCZ}\left(N,M,Z-1\right),N=MZ+r$ 其中 $0\leqslant r<Z$	是	$\eta=1$
文献[10]	Pu 矩阵	$\mathrm{ZCZ}\left(M,M^{2}P^{N},\left(M-1\right)P^{N}\right)$	否	$\eta<1$
文献[13]	完备序列和正交矩阵	$\mathrm{ZCZ}\left(mn,m,n-1\right),\gcd\left(m,n\right)=1$　$\mathrm{ZCZ}\left(mn,m,n-2\right),m\vert n$ $\mathrm{ZCZ}\left(mn,m,n-2\right),n\vert m$	否	$\eta<1$
文献[14]	完备序列移位序列	$\mathrm{ZCZ}\left(2N,2M,Z\right)$	是	$\eta\leqslant1$
文献[20]	ZCZ 序列集完备高斯整数序列	$\mathrm{ZCZ}\left(NK,M,ZK\right)$	否	$\eta\leqslant1$
本文构造法 1	完备序列正交序列集	$\mathrm{ZCZ}(NN_0,Q,Z),Q=pN_1Z$	是	$\eta=1$
本文构造法 2	完备序列正交序列集	$\mathrm{ZCZ}(NN_0,Q,Z),Q=p^nN_1Z$	是	$\eta=1$

长度之间互相限制。文献[10]构造了几乎最佳 ZCZ 序列对，其参数需要满足$P\mid M$成立。文献[13]基于完备序列和正交矩阵，利用交织技术构造了一类 p 相 ZCZ 序列集。零相关区长度受基序列限制，为确定值$n-1$或者$n-2$。文献[14]基于完备序列和移位序列，利用交织法构造了 ZCZ 序列集，其序列集长度只能为偶数长度。文献[20]以 ZNZ 序列集和完备高斯整数序列为基序列构造高斯整数ZCZ序列集，序列长度是初始 ZCZ 序列长度的整数倍，参数受初始序列集参数限制，若选取的初始 ZCZ 序列集参数可以达到理论界限，构造的高斯整数 ZCZ 序列集也可以达到理论界限。本文构造法 1 和构造法 2 中所构造的 ZCZ 序列集，参数可以达到理论界限，且在满足 $p=\dfrac{Z}{N}$ 或 $p^n=\dfrac{Z}{N}$ 的条件下零相关区长度可以灵活选择。同时，通过改变集合O和集合R，可以得到多个移位不等价 ZCZ 序列集。

本文以完备序列和正交序列集为基序列构造 ZCZ 序列集，在实际应用中，为了满足通信系统的不同需求，可以选择不同类型的基序列来构造不同形式的 ZCZ 序列集。在满足参数 $p=\dfrac{N}{Z},0<Z\leqslant p-1$ 或 $p^n=\dfrac{N}{Z},0<Z<p^n-1$ 的条件下，如选择长度为N的多相完备序列和N_0阶 Hadamard 矩阵作为基序列，可以构造出多相 ZCZ 序列集；选择完备高斯整数序列和多电平正交矩阵为基序列，可以构造出高斯整数 ZCZ 序列集。

5　结束语

本文基于完备序列和正交序列集，提出了一类最佳零相关区序列集的构造方法。所得序列集为最佳零相关区序列集，且在满足 $p=\dfrac{Z}{N}$ 或 $p^n=\dfrac{Z}{N}$ 的条件下零相关区长度可以灵活选择。通过改变参数集合O和集合R，可以生成多个具有相同参数的移位不等价零相关区序列集，为 QS-CDMA 通信系统提供更多扩频序列。

参考文献：

[1] SUEHIRO N. A signal design without co-channel interference for approximately synchronized CDMA systems[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 1994, 12(5): 837-841.

[2] CHEN H B, ZHANG R Q, ZHAI W J. Interference-free pilot design and channel estimation using ZCZ sequences for MIMO-OFDM-based C-V2X communications [J]. China Communications, 2018, 15(7): 47-54.

[3] ZHANG R X, CHENG X, MA M. Interference-avoidance pilot design using ZCZ sequences for multi-cell MIMO-OFDM systems[C]//2012 IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM). Piscataway: IEEE Press, 2012: 5056-5061.

[4] TANG X H, FAN P Z, MATSUFUJI S. Lower bounds on correlation of spreading sequence set with low or zero correlation zone [J]. Electronics Letters, 2000, 36(6): 551-552.

[5] LIU Z L, GUAN Y, PARAMPALLI U. A new construction of zero correlation zone sequences from generalized Reed-Muller codes[C]// 2014 IEEE Information Theory Workshop. Piscataway: IEEE Press, 2014: 591-595.

[6] ZHOU Z C, TANG X H, PENG D Y. New optimal quadriphase zero correlation zone sequence sets with mismatched filtering[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2009, 16(7): 636-639.

[7] DENG X M, FAN P Z. Spreading sequence sets with zero correlation

zone[J]. Electronics Letters, 2000, 36(11): 993-994.

[8] APPUSWAMY R, CHATURVEDI A. A new framework for constructing mutually orthogonal complementary sets and ZCZ sequences[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(8): 3817-3826.

[9] TANG X H, MOW W H. Design of spreading codes for quasi-synchronous CDMA with intercell interference[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2006, 24(1): 84-93.

[10] DAS S, PARAMPALLI S, MAJHI U. Near-optimal zero correlation zone sequence sets from paraunitary matrices[C]//2019 IEEE International Symposium on Information Theory. Piscataway: IEEE Press, 2019: 2284-2288.

[11] TORII H, NAKAMURA M, SUEHIRO N. A new class of zero correlation zone sequences[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2004, 50(3): 559-565.

[12] TAKATSUKASA K, MATSUFUJI S, WATANABE Y. Ternary ZCZ sequence sets for cellular CDMA systems[J]. IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 2002, E85-A(9): 2135-2140.

[13] TANG X H, MOW W H. A new systematic construction of zero correlation zone sequences based on interleaved perfect sequences[J]. IEEE Transaction on Information Theory, 2008, 54(12): 5729-5734.

[14] ZHOU Z C, TANG X H. A new classes of sequences with zero or low correlation based on interleaving technique[J]. IEEE Transaction on Information Theory, 2008, 54(9): 4267-4273.

[15] 李玉博, 许成谦. 交织法构造移位不等价的 ZCZ/LCZ 序列集[J]. 电子学报, 2011, 39(4): 796-802.
LI Y B, XU C Q. Construction of cyclically distinct ZCZ/LCZ sequence sets based on interleaving technique[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(4): 796-802.

[16] 陈晓玉, 许成谦. 基于交织法的不等价低零相关区序列集设计[J]. 电子学报, 2013, 41(5): 890-896.
CHEN X Y, XU C Q. Construction of shift distinct sequence sets with lower zero correlation zone based on interleaving technique[J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(5): 890-896.

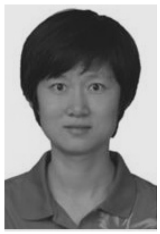
[17] 李明阳, 柏鹏, 王徐华. 基于交织和完备序列的零相关区序列集构造方法[J]. 南京邮电大学学报(自然科学版), 2014, 34(6): 52-56.
LI M Y, BAI P, WANG X H. Construction method for zero correlation zone sequence set based on interleaving technique and perfect sequence[J]. Journal of Nanjing University of Posts and Telecommunications (Natural Science Edition), 2014, 34(6): 52-56.

[18] LI Y B, SUN J A, XU C Q. Constructions of optimal zero correlation zone aperiodic complementary sequence sets[J]. IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 2017, E100- A(3): 908-912.

[19] LIU T, LI Y B, XU C Q. Constructions of asymmetric binary ZCZ sequence sets[C]//2017 Eighth International Workshop on Signal Design and Its Applications in Communications. Piscataway: IEEE Press, 2017: 108-111.

[20] 陈晓玉, 李冠敏, 孔德明, 等. 高斯整数零相关区序列集构造方法的研究[J]. 电子与信息学报, 2019, 41(6): 1420-1426.
CHEN X Y, LI G M, KONG D M, et al. Constructions of Gaussian integer ZCZ sequences set[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2019, 41(6):1420-1426.

[作者简介]



陈晓玉（1983− ），女，内蒙古赤峰人，博士，燕山大学副教授、硕士生导师，主要研究方向为序列设计、无线通信技术。

高茜超（1994− ），女，河北唐山人，燕山大学硕士生，主要研究方向为序列设计。

李永杰（1995− ），男，河北张家口人，燕山大学硕士生，主要研究方向为序列设计。